

Dr.-Ing. Casimir Katz

Fließzonentheorie mit Interaktion aller Stabschnittgrößen bei Stahltragwerken

Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinrich Werner zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einführung

Im Zuge der Eurocodes werden nichtlineare Berechnungen zunehmend weiter verbreitet. Dabei sind für den Stahlbau sowohl Nachweisverfahren im Bruchzustand (elastisch-plastisch) als auch komplette Berechnungen (plastisch-plastisch) einsetzbar. Bei den letzteren kann zwischen der sogenannten Fließgelenk und der Fließzonentheorie unterschieden werden. Für die Fließzonentheorie spricht vor allem eine realistische Erfassung auch der Verformungen. Gegen die Fließgelenktheorie gab und gibt es so viele Bedenken [1,2,3], daß man heute eigentlich nur noch die Fließzonentheorie anwenden sollte. Trotzdem hält sich in Fachkreisen hartnäckig das Vorurteil, daß Fließzonentheorie nur für wissenschaftliche Fragen interessant ist.

Ein besonderes Problem stellt bei beiden Verfahren die Interaktion zwischen Normalspannungen und Schubspannungen im Querschnitt dar. In vielen Rechenverfahren ist diese vernachlässigt oder abgeschätzt worden. Aber Rubin [4] weist darauf hin, daß für I-Querschnitte quasi alle baupraktischen Fälle einen Einfluß der Querkraft berücksichtigen müßten. Im folgenden soll gezeigt werden, daß es praxisgerechte Verfahren gibt, die alle Einflüsse befriedigend und wirtschaftlich erfassen können

2. Fließzonentheorie

Die wesentliche Eigenschaft der Fließzonentheorie besteht darin, daß alle Stufen zwischen dem Erreichen der Streckgrenze in der äußersten Faser bis zum voll plastifizierten Querschnitt durch eine entsprechende Reduktion der Steifigkeiten in einer nichtlinearen statischen Berechnung erfaßt wird. Das in [5] beschriebene numerische Verfahren, das eine Erweiterung des von Werner et al. [6] aufbereiteten Algorithmus darstellt, funktioniert nach der Methode, daß zu einem definierten Dehnungs- und Krümmungszustand die inneren Schnittgrößen bestimmt werden, die dann zur Ermittlung von

Sekantensteifigkeiten oder plastischen Anfangskrümmungen bzw. Dehnungen herangezogen werden.

Für die Anwendung dieser Methode muß der Stab sowohl in seiner Längsrichtung durch Abschnitte, als auch im Querschnitt durch einzelne Bleche diskretisiert werden. Wie bei allen numerischen Verfahren kann eine falsche (zu grobe) Wahl der Diskretisierung ungenaue Ergebnisse produzieren.

Die Schubspannungen wurden vorab durch eine Reduktion der Blechdicke der schubtragenden Teile wie z.B. den Stegen berücksichtigt. Für eine bessere Theorie ist es aber wünschenswert auch bei der Schubtragfähigkeit einen Übergang zwischen elastischem und plastischem Grenzwert zu schaffen.

Dazu soll zuerst der plastische Grenzwert ein wenig näher betrachtet werden. Auch wenn die Interaktionsformeln für Schnittgrößen für die Fließzonentheorie so ohne weiteres nicht zu verwenden sind, da sie vom Grenzzustand unendlich großer Dehnungen ausgehen, sind die Grundsätze für ihre Ermittlung auch für die Fließzonentheorie von Bedeutung.

3. Interaktion der plastischen Schnittgrößen

Für die Ermittlung der plastischen Schnittgrößen wird ein Sprung der wirkenden Normalspannung von plus auf minus f_y angenommen, der nur durch eine unendlich große Krümmung zustande kommen kann. Die Abweichungen zu den Grenz-Schnittgrößen mit endlicher Dehnung sind aber nicht allzugroß. Die Interaktion von Normalkraft und Biegemoment sind z.B. bei Petersen [1] geschlossene Formeln für einachsige Beanspruchung von Rechteck- und I-Querschnitte angegeben. Die DAST-Richtlinie 008 (03.73) hat hierfür eine vereinfachte Geradengleichung vorgesehen, die die Tragfähigkeit durchaus um bis zu 30 Prozent unterschätzen kann:

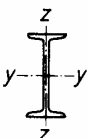
$$M_{pl,N} = 1.1 \cdot \left[1 - \frac{N}{N_{pl}} \right] \cdot M_{pl} \quad N > 0.1N_{pl}$$
$$M_{pl,N} = M_{pl} \quad N < 0.1N_{pl}$$

Für die M/N/Q-Interaktion steht nach Petersen eine strenge Lösung bis heute aus. Es wird jedoch nach dem statischen Tragkraftsatz darauf hingewiesen, daß man eine auf der sicheren Seite liegende Lösung erhält, wenn man einen Gleichgewichtszustand findet, der nirgends die Fließbedingung verletzt. Deshalb kann man z.B. innerhalb des Steges eine reduzierte Fließspannung ansetzen. Unter dieser Annahme und der Randbedingung, daß die Querkraft natürlich noch nicht über der plastischen Querkraft liegen darf, kann man eine Interaktionsfläche berechnen, die wiederum in der DAST-Richtlinie 008 durch eine Ebene approximiert wird.

$$M_{pl,N,Q} = \left[1.1 - 1.1 \frac{N}{N_{pl}} - 0.3 \frac{Q}{Q_{pl}} \right] \cdot M_{pl}$$

In der DIN 18800 (1990) sind in der Tabelle 16 bzw. 17 Interaktionsbedingungen angegeben, die Haupt- und Querbiegung teilweise getrennt, jedoch teilweise mit quadratischen Koeffizienten beschreiben. In einer Anmerkung steht auch, daß offensichtlich nicht alle Schnittgrößen gleichzeitig den plastischen Grenzzustand erreichen können. Diese Formeln gelten auch nur für einige ausgewählte Querschnittstypen. Verallgemeinerte Interaktionsgleichungen findet man bei Rubin[4].

Vereinfachte Tragsicherheitsnachweise für doppelsymmetrische I-Querschnitte mit N, My, Vz

Momente um y-Achse 	Gültigkeitsbereich	$\frac{V}{V_{pl,d}} \leq 0,33$	$0,33 < \frac{V}{V_{pl,d}} \leq 0,9$
	$\frac{N}{N_{pl,d}} \leq 0,1$	$\frac{M}{M_{pl,d}} \leq 1$	$0,88 \frac{M}{M_{pl,d}} + 0,37 \frac{V}{V_{pl,d}} \leq 1$
$0,1 < \frac{N}{N_{pl,d}} \leq 1$	$0,9 \frac{M}{M_{pl,d}} + \frac{N}{N_{pl,d}} \leq 1$	$0,8 \frac{M}{M_{pl,d}} + 0,89 \frac{N}{N_{pl,d}} + 0,33 \frac{V}{V_{pl,d}} \leq 1$	

Vereinfachte Tragsicherheitsnachweise für doppelsymmetrische I-Querschnitte mit N, My, Vz

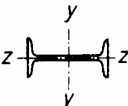
Momente um z-Achse 	Gültigkeitsbereich	$\frac{V}{V_{pl,d}} \leq 0,25$	$0,25 < \frac{V}{V_{pl,d}} \leq 0,9$
	$\frac{N}{N_{pl,d}} \leq 0,3$	$\frac{M}{M_{pl,d}} \leq 1$	$0,95 \frac{M}{M_{pl,d}} + 0,82 \left(\frac{V}{V_{pl,d}} \right)^2 \leq 1$
$0,3 < \frac{N}{N_{pl,d}} \leq 1$	$0,91 \frac{M}{M_{pl,d}} + \left(\frac{N}{N_{pl,d}} \right)^2 \leq 1$	$0,87 \frac{M}{M_{pl,d}} + 0,95 \left(\frac{N}{N_{pl,d}} \right)^2 + 0,75 \left(\frac{V}{V_{pl,d}} \right)^2 \leq 1$	

Tabelle I, Interaktionen nach DIN 18800

Im allgemeinen Fall, oder wenn man genauere und damit hoffentlich auch wirtschaftlichere Lösungen sucht, kann man entweder auf Versuche oder elastoplastische und geometrisch nichtlineare FE-Berechnungen ausweichen. Beide Verfahren sind aber so aufwendig, daß sie für den Alltag des Ingenieurs wohl noch nicht in Frage kommen. Für eine praxistaugliche Methode dazwischen bietet sich eine Fließzonentheorie an, die die bisher beschriebenen Verfahren verallgemeinert.

4. Interaktion der Spannungen

Die Grundlagen der plastischen Verfahren sind nach DIN 18800 (755):

- Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element sind einzuhalten. Bei Rubin [4] wird in einem ersten Ansatz genau dieses angesetzt. Damit werden die auf den ersten Blick problematischen Randbedingungen und die Schubflüsse in den Flanschen aus Querkraft in Haupttragrichtung korrekt erfaßt. Rubin zeigt dann aber durch einen Grenzübergang, daß die eingeführte Einflußhöhe auf der sicheren Seite liegend gegen Null gehen kann und dann konstante Schubspannungen im Querschnitt mit den Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr im Widerspruch stehen. Bei I-Querschnitten können die Schubspannungen im Steg folglich als konstant behandelt werden und die Schubspannungen im Flansch werden für die Hauptbiegung nicht benötigt. Es ist somit möglich, innerhalb des Querschnitts unter Berücksichtigung beliebig großer Dehnungen fast jede Spannungsverteilung zu erzeugen. Welche Zustände hier ausgeschlossen sein sollen, ist mir deshalb nicht mehr ganz verständlich.
- Ebenbleiben der Querschnitte
Dies entspricht der klassischen Biegetheorie, stellt aber natürlich die Frage was mit der Wölbkrafttorsion passieren soll. Für den vollplastischen Grenzzustand kann sie nach Rubin vernachlässigt werden, da die Saint-Venant'sche Torsion für das Gleichgewicht ausreicht. Aber muß sie deshalb vernachlässigt werden ? Und was ist im Übergangsbereich der Fließzonentheorie ?
- Linear elastische-idealplastische Spannungs-Dehnungsbeziehungen
Wieder bleibt es unklar, ob man Verfestigungen auch dann nicht berücksichtigen darf, wenn man mit realistischen Verformungen im Rahmen der Fließzonentheorie rechnen will.
- Fließbedingung über die Vergleichsspannung der Gleichung (36)
Dies ist natürlich nur eine von mehreren Formeln für die Vergleichsspannung. Für die Fließbedingung kann man sich auf die Normalspannung σ_x und die Schubspannungen τ_{xy} bzw. τ_{xz} beschränken, da Schubspannungen τ_{yz} und σ_y bzw. σ_z nur in Lasteinleitungspunkten auftreten können und dann von der Änderung von Steifigkeiten des Querschnitts kaum beeinflusst sein dürften. Für die lokale Traglast von solchen Diskontinuitätsbereichen ist die Stabtheorie generell nicht geeignet. Hier muß man auf Versuche oder aufwendigere FE-Berechnungen ausweichen, bei denen der ganze Querschnitt einschließlich aller Steifen mit Faltnetzselementen abgebildet wird.

Wenn man auf der Basis der Fließzonentheorie rechnen will, so benötigt man außer einer iterativen statischen Rechnung mit veränderlichen Steifigkeiten auch ein Rechenverfahren, daß die Interaktion auf Querschnittsebene an Hand der Spannungen auch im teilplastifizierten Bereich behandeln kann. Vorhanden sind bei einer Stabwerksberechnung:

- Eine linearelastische Verteilung der Normalspannungen (inklusive Wölbkrafttorsion sofern gewünscht)
- Eine linearelastische Verteilung der Schubspannungen aus Querkraft und Torsion
- Ein Dehnungszustand in Form einer Ebene (additiv eine überlagerte Einheitsverwölbung)
- Eine Fließbedingung

Für den linearen Schubspannungsverlauf im Querschnitt sind meist aufwendigere Rechenverfahren erforderlich, die nach dem Weg- oder Kraftgrößenverfahren die Schubflüsse berechnen können.

In einem ersten Schritt kann man nun unter einer gegebenen Beanspruchungskombination eine lineare Vergleichsspannung in allen beliebigen Punkten des Querschnitts ermitteln und diese ins Verhältnis zur Fließspannung des Materials setzen.

In einem zweiten Schritt könnte man diese Spannungen "irgendwie" reduzieren so daß die Fließregel eingehalten wird.

In einem dritten Schritt kann man dann aus den Spannungen durch numerische Integration resultierende Schnittgrößen und daraus nichtlineare Steifigkeiten ermitteln.

Die Schnittgrößen werden schließlich im Zuge eines Iterationsprozesses über die Steifigkeiten oder plastische Dehnungen wie in [5,7] beschrieben ins globale Gleichgewicht gebracht.

Für die gewünschte Reduzierung der Spannungen sind im Prinzip drei Verfahren denkbar, denen allen gemein ist, daß jeder Spannungspunkt unabhängig von den benachbarten Punkten bleibt. Plastische Dehnungen, die in y oder z -Richtung so behindert werden, daß zusätzliche Spannungserhöhungen entstehen könnten, bleiben somit unberücksichtigt und stellen eventuell noch eine Tragreserve gegenüber Versuchsergebnissen dar. Dies entspricht formal durchaus anderen Ansätzen der Ingenieurmechanik wie. z.B. dem Bettungszahlverfahren.

Man hat die Wahl zwischen

- **Prandtl-Lösung**

Man wendet die Fließregel nach Prandtl an und ermittelt sich plastische Dehnungen, die auf die Fließfläche senkrecht stehen. Dazu wird wie in vielen FE-Büchern beschrieben [8], zuerst der Beginn der

Plastifizierung mit einer gleichmäßigen Reduktion nach der ersten Methode ermittelt, und dann für das verbleibende plastische Dehnungsinkrement eine elastoplastische Elastizitätsmatrix aus der elastischen Matrix C berechnet

$$\sigma = \left[C - \frac{q \cdot C \cdot q^t}{q^t \cdot C \cdot q} \right] \cdot \varepsilon \quad q = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

- Isotrope Reduktion

Schub- und Normalspannung werden im gleichen Verhältnis abgemindert, so daß die Vergleichsspannung gerade die Fließspannung erreicht.

$$\sigma = \left[\frac{f_y}{\sigma_{v,elastisch}} \right] \cdot \sigma_{elastisch} \quad \tau = \left[\frac{f_y}{\sigma_{v,elastisch}} \right] \cdot \tau_{elastisch}$$

- Vorrang Schub

Die Schubspannung wird in voller Größe aufgenommen, die maximale Normalspannung wird dadurch reduziert. Das ist der herkömmliche Ansatz bei Handrechnungen. Er bleibt unbefriedigend für starke Schubbeanspruchungen, da er dann zu numerisch unvorteilhaften Situationen führt, bei denen eine Vergrößerung der Krümmung keine Auswirkungen mehr hat.

$$\tau = \min \left\{ \left[\frac{f_y}{\sqrt{3}}, \tau_{elastisch} \right] \right\} \quad \sigma = \min \left\{ \sqrt{f_y^2 - 3\tau^2}, \sigma_{elastisch} \right\}$$

Für eine nichtlineare Rechnung lassen sich Schubbeanspruchungen als Kräfte normalerweise weniger leicht umlagern als die Momente. Deshalb gibt es viele Fälle in denen das letzte Verfahren am schnellsten konvergiert.

5. Iteration der Schnittgrößen

Mit einem der oben genannten Verfahren kann man sich Spannungen ermitteln, die die Fließgrenze nicht überschreiten und daraus resultierende Schnittgrößen berechnen. Dabei darf man aber nicht einfach die resultierenden Spannungskomponenten addieren, sondern muß dies getrennt für die einzelnen Beanspruchungen durchführen, sonst kann man bei

zweiachsiger Biegung durch Teilplastifizierungen unsymmetrische und letztlich unsinnige Ergebnisse erhalten. Ähnliche Probleme werden auch bei Rubin geschildert, für den Fall der Torsion in Kastenquerschnitten, die die Querkraftbeanspruchung der Stege unterschiedlich rechts und links beeinflussen. Die Schubbeanspruchung in den Flanschen eines I-Profiles infolge Q_z leisten keinen direkten Beitrag in der Richtung der Querkraft. Sie sind auch nicht für den vollplastischen Grenzzustand wichtig, da ja dort davon ausgegangen wird, daß die Schubspannung quasi sofort auf den vollplastischen Wert springt. Für den Übergang ist es jedoch durchaus angebracht, diese Spannungen in der Vergleichsspannung zu berücksichtigen. Bei zweiachsiger Biegung werden die Flansche auch für die Querkraft in Querrichtung gebraucht.

Man kann numerische Integrationsverfahren mit Spannungen nur in diskreten Gauß-Punkten verwenden. Dieses Vorgehen befreit von fehleranfälligen Formeln, wie sie in der Literatur zu finden sind. Man sollte dabei die Integrationsordnung etwas höher wählen, damit man lokale Plastifizierungen vor allem im oberen Bereich des Steges bei I-Trägern genau genug erfaßt.

In einem ersten Iterationszyklus kann man jetzt die Dehnungsebene so verändern, daß die inneren Schnittgrößen Normalkraft und Biegemoment gleich den äußeren Schnittgrößen werden. Für die Schubbeanspruchungen werden die Schubwinkel, bzw. was diesem formal entspricht, der lineare Schubspannungsverlauf variiert.

Wenn diese Schnittgrößen gleich den vorhandenen Schnittgrößen sind, ist im Prinzip der Nachweis erbracht, daß die Schnittgrößen aufnehmbar sind. Bei der Methode elastisch-plastisch ist unter Berücksichtigung von Grenzwerten für eine maximale Erhöhung des Moments auf das 1.25-fache des elastischen Grenzmoments der Nachweis damit bereits beendet.

Wenn die äußere Beanspruchung hingegen größer ist, so muß für die dann erforderlichen Umlagerungen sich eine iterative Berechnung des gesamten Tragwerks anschließen. Dafür benötigt man nichtlineare Steifigkeiten, die in einem ersten Schritt natürlich nicht ins Bodenlose fallen sollten. Dazu bietet sich die Methode an, die aufnehmbaren Schnittgrößen zu einer vorgegebenen Krümmung bzw. Dehnung zu suchen oder mit plastischen Korrekturdehnungen zu arbeiten. [5,7]

Für die Biegebeanspruchung ist dies relativ einfach definierbar, indem man die folgende Bestimmungsgleichung entweder nach den plastischen Krümmungen k_0 auflöst oder sich daraus Sekantensteifigkeiten ermittelt:

$$\begin{vmatrix} M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} EI_y & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_y \\ k_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{y0} \\ k_{z0} \end{vmatrix}$$

Bei der Schubbeanspruchung führt schon in einigen Fällen die Reduzierung der Biegesteifigkeit zu kleineren Schubbeanspruchungen, im allgemeinen Fall muß man jedoch die statische Berechnung mit Schubverformungen durchführen, nur dann kann man die Schubsteifigkeiten entsprechend reduzieren. Dabei ist es völlig ausreichend, analog zur Biegebeanspruchung Schubgleitungen aus einer analogen Beziehung zu ermitteln.

Nicht bei allen Systemen führt dieses Vorgehen aber zu einer Konvergenz der Umlagerung. Wenn die Querkraft sich nicht umlagert, so wird die Schubsteifigkeit immer kleiner werden und sich ein Fließgelenk für Schub ausbilden.

6. Besonderheiten

Natürlich gibt es eine Reihe von weiteren Besonderheiten, die beachtet werden müssen, wenn man eine solche Methode in ein kommerzielles Programm wie z.B. die SOFiSTiK-Programme implementiert.

Aufnehmbare Schnittgrößen

Wenn ein Querschnitt berechnet wird, ist nicht nur von Interesse, ob die Schnittgrößen aufgenommen werden können, sondern im Rahmen der Sicherheitstheorie eben auch welche Tragreserven noch vorhanden sind. Diese sind entweder durch eine gleichmäßige Steigerung der Belastung bis zum Versagen des Querschnitts ermittelbar, oder aus den nichtlinearen Steifigkeiten rückrechenbar. Insbesondere kann man Forderungen wie maximal 25 Prozent über der elastischen Grenzlast zu liegen aus einer maximal 1/1.25 -fachen Reduktion der Steifigkeiten ablesen.

Für den praktischen Einsatz ist es nicht unbedingt erforderlich, daß alle Schnittgrößen ein gleiches Sicherheitsniveau haben, da beim Stahl einer Verringerung einer Beanspruchung normalerweise keine Überbeanspruchung hervorruft. Bei Stahlbeton ist dies anders. Dort kann ja eine Druckkraft eventuell günstig wirken, was aber in der Praxis des Stahlbetonbaus auch selten beachtet wird.

Torsion

Die DIN 18800 schweigt sich im Bild 18 über Torsion aus. Auch bei Petersen gibt es keine Hinweise auf die plastische Torsionstragfähigkeit. Bei Rubin wird die Torsion von Kastenquerschnitten analog der Querkraft durch einen Abzug der Blechdicke behandelt.

Für die Torsion eines geschlossenen Querschnitts ist die dünnste Stelle maßgebend, d.h. bei Erreichen der Fließspannung an dieser Stelle hat der Querschnitt keine Tragreserve für Torsion mehr, sofern er nicht mehrzellig ist. Dieses Versagen muß auf jeden Fall getrennt von der Integration der

Spannungen berücksichtigt werden. Zusätzlich ist zu beachten, daß nicht durch die Plastifizierung Spannungszustände entstehen, die das Gleichgewicht verletzen.

Bei einem offenen Querschnitt können jedoch durchaus auch Teile nach und nach plastifizieren. Dabei tritt ein Schubspannungsverlauf auf, der in der Mitte des Querschnitts das Vorzeichen wechselt. Dies entspricht wieder weit mehr der Fließgelenktheorie als der eigentlich angestrebten Fließzonentheorie. Die Überlagerung dieses Zustandes mit dem über die Breite konstanten Schubfluß muß notwendigerweise von irgendeinem Mittelwert ausgehen. Aus den Grenzzuständen elastisch und vollplastisch kann man sich entsprechende Skalierungen besorgen.

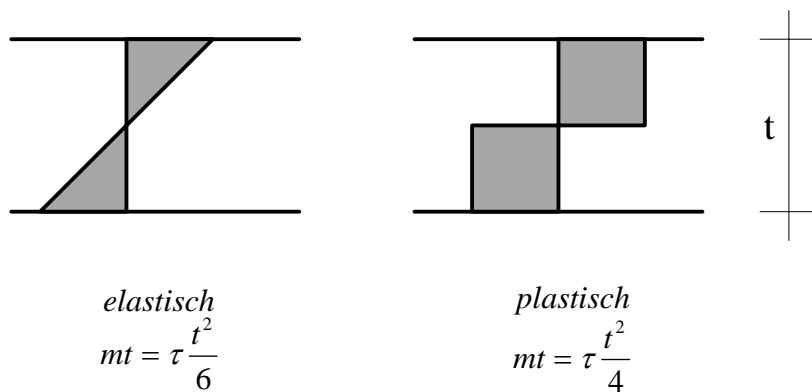


Bild 1: Schubspannungen aus Torsion (shear stress form torsion)

Bei der Integration dieser Spannungen ist zu beachten, daß der Schubfluß auch Komponenten senkrecht zum Blech hat, die noch einmal den gleichen Beitrag liefern. Es ist auf jeden Fall sinnvoll, die Torsion für geschlossene Querschnitte und offenen Teile getrennt zu betrachten.

7. Beispiele an einem offenen Querschnitt

Die ausgewählten Beispiele sollen demonstrieren, was der beschriebene Ansatz leisten kann. Es sollte erwartet werden, daß eine genauere Berechnung der Interaktion gewisse Reserven der Näherungsfunktionen noch ausschöpfen könnte. In einem ersten Beispiel werden deshalb für einen Querschnitt die inneren Schnittgrößen unter unterschiedlichen äußeren Beanspruchungskombinationen und den unterschiedlichen Fließansätzen dargestellt. Es handelt sich um einen IPE 360 aus ST37 mit folgenden Referenz-Kenngrößen:

$N_{\text{plas}}/1.1$	1586 kN
$V_{y\text{-plas}}/1.1$	544 kN
$V_{z\text{-plas}}/1.1$	372 kN

$$M_{y-plas}/1.1$$

222 kNm

$$M_{z-plas}/1.1$$

40 kNm

Zuerst werden verschiedene Verhältnisse von Momenten und Querkräften bis zum Versagen des Querschnitts erhöht und diese mit den herkömmlichen Interaktionsbeziehungen verglichen.

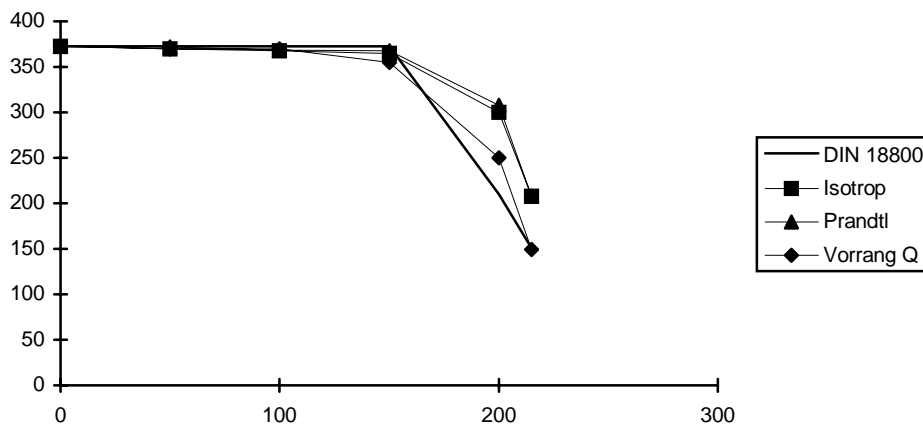


Bild 2: Qz-My Interaktion eines I-Profiles (Qz-My interaction of double T-beam)

Die isotrope Reduktion und die Prandtl-Lösung bringen gegenüber der Interaktionsgeraden der DIN 18800 offensichtlich wirtschaftlichere Ergebnisse. Wenn man die so ermittelten Schnittgrößen mit der Interaktionsformel der DIN 18800 vergleicht, ergeben sich bis zu 9 Prozent beachtlich höhere Ausnutzungsgrade.

Die Interaktion zwischen Querkraft und Torsionsmoment hat die folgende Gestalt für alle drei Formen der Fließfunktion. Auch bei Ausschöpfung der maximalen plastischen Querkraft, können die Flansche noch Torsionsanteile aufnehmen.

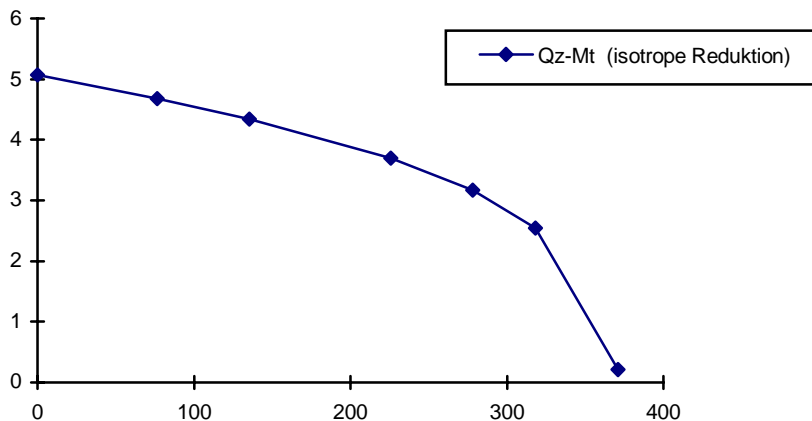


Bild 3: Qz-Mt Interaktion eines I-Profiles (Qz-Mt interaction of double T-beam)

Für eine iterative statische Berechnung muß das Verfahren bei Überbeanspruchungen erst mal eine maßvolle Reduktion der Steifigkeiten erbringen. Für drei Momente (100,200 und 215 kNm) wird in den folgenden Tabellen der Abbau der Steifigkeit in Abhängigkeit von der wirkenden Querkraft gezeigt.

Die folgenden Tabellen zeigen die Entwicklung der Steifigkeiten im ersten Iterationsschritt für entsprechende Beanspruchungen. Alle Verfahren zeigen zufriedenstellende Kurven:

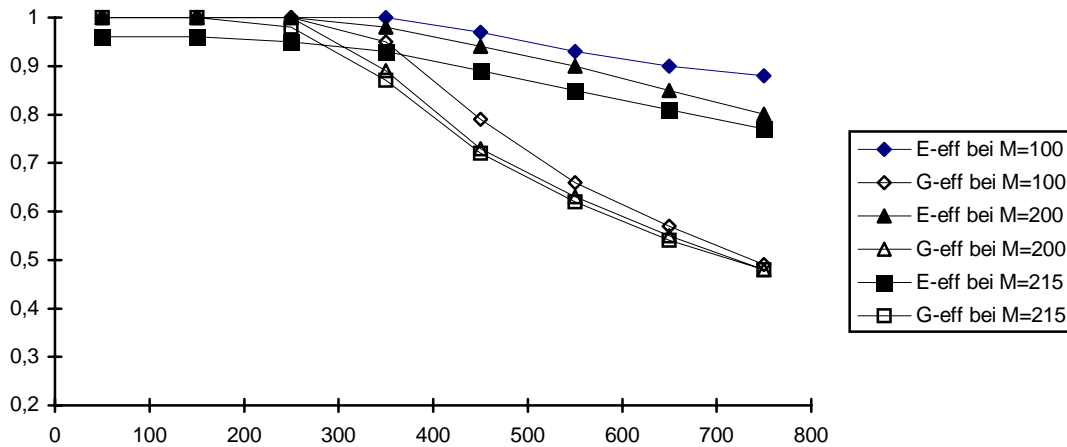


Bild 4: Steifigkeitsabfall 1. Iteration Prandtl
Stiffness after 1. Iteration Prandtl

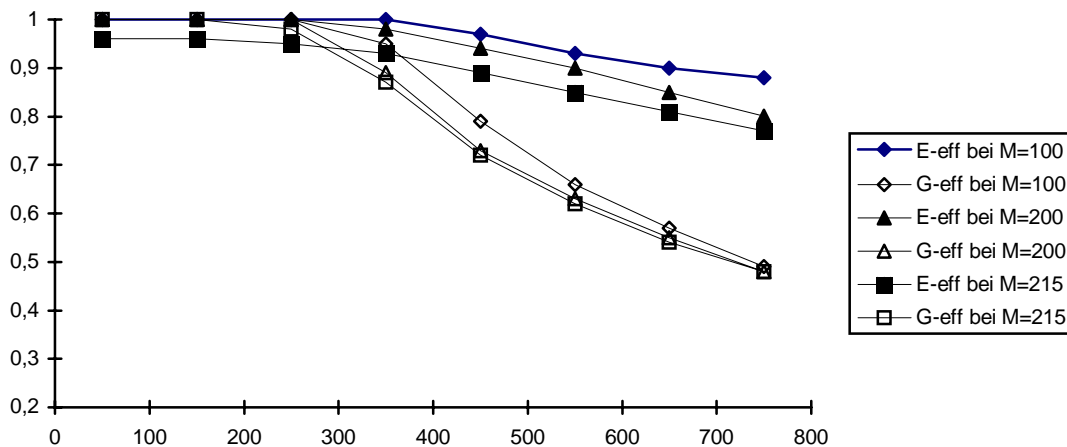


Bild 5: Steifigkeitsabfall 1. Iteration isotrop
Stiffness after 1. Iteration isotrope

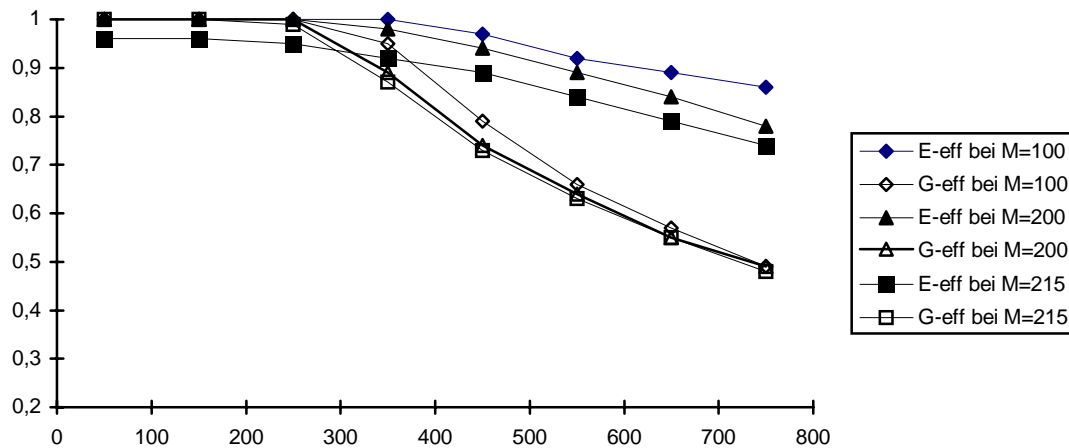


Bild 6: Steifigkeitsabfall 1. Iteration Vorrang Querkraft
Stiffness after 1. Iteration standard preferation of shear

Die Biegesteifigkeit wird bei der dritten Methode am stärksten, bei der zweiten Methode am wenigsten abgebaut.

Es folgt ein Überblick über die Entwicklung der Spannungen bei vorgegebenen Anfangsdehnungen für das Moment 200 kNm und eine variable Querkraft. Links sind die Normalspannungen, in der Mitte die Schubspannungen und rechts die Vergleichsspannungen. Von oben nach unten wird die Querkraft gesteigert. Dadurch ergeben sich auch Reduzierungen in den Normalspannungen.

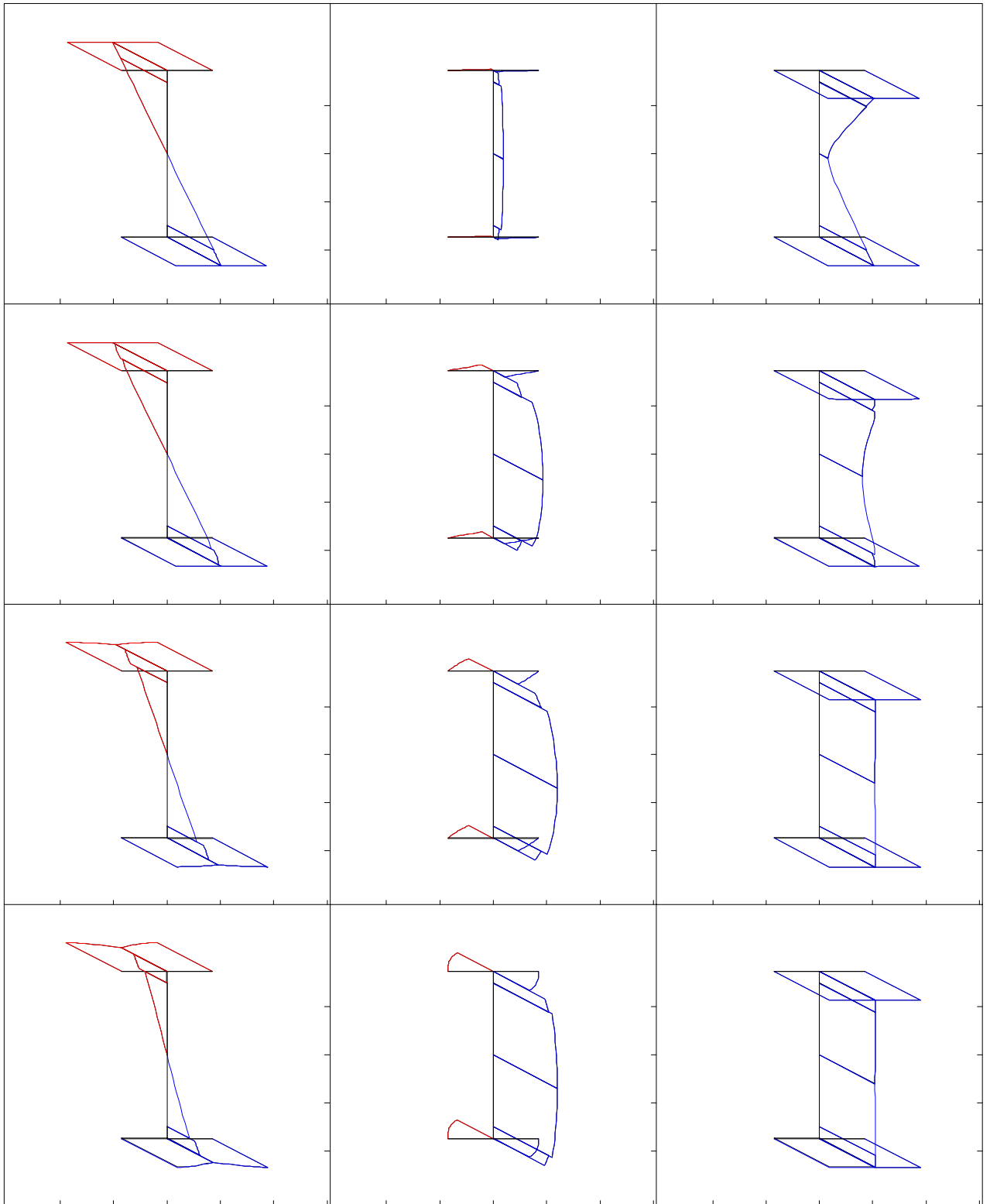


Bild 7: Spannungsverteilungen (Stress distributions)

8. Beispiele an einem geschlossenen Querschnitt

Mit diesem Beispiel soll das Problem der mehrzelligen Querschnitte noch aufgezeigt werden. Dazu wird ein dreizelliger Kasten betrachtet, der verschiedene Blechstärken erhalten soll:

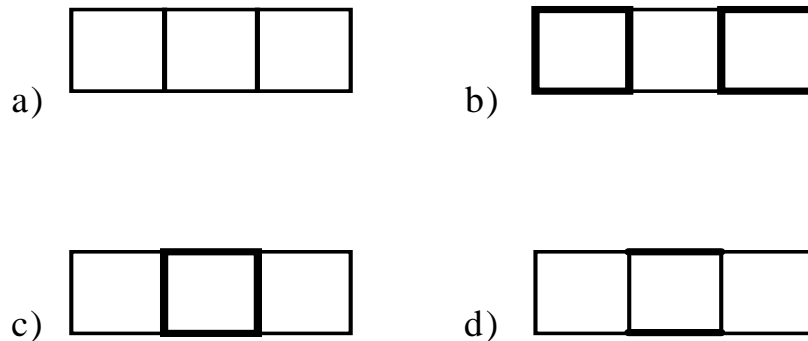


Bild 8: geschlossene Querschnittstypen (types of closed section)

Fall a) ist die Referenz mit konstanter Blechdicke. Im Falle b) existiert ein innerer Kern mit größerer Blechdicke, im Fall c) bzw. d) sind nur die Deckbleche dünner bzw. dicker als der restliche Querschnitt. Die Kastenabmessungen sind in den folgenden Zahlen jeweils 300 x 100 mm Kantenlänge und 1 mm Blechstärke in den äußeren Zellen.

Die Bezeichnungen für den linearen Schubfluß sind:

- T_a Schubfluß in den äußeren Zellen
- T_o Schubfluß in den oben und unten liegenden Blechen der Mitte
- T_i Schubfluß in den inneren senkrechten Wänden

Für einen allgemeinen Algorithmus muß man erwarten, daß er in keinem Fall auf der unsicheren Seite liegen sollte. In der folgenden Tabelle 2 ist deshalb gegenübergestellt welche plastischen Grenzmomente aus Torsion man in den Fällen a) und b) erreichen kann, wenn man

- die maximale Schubspannung zugrunde legt (I)
- alle Bleche voll mit der Fließspannung ansetzt (II).

Für den Querschnitt b) können die zwei äußeren Kästen getrennt Torsion abtragen, es ist also II der realistischere Fall. Auch in den Fällen c) und d) können Torsionsschubflüsse gefunden werden, die jeweils alle Tragreserven nach Methode II ausnützen.

t0/ta	Ta	To	Ti	Mt-plas-I	Mt-plas-II
1,00	15,84	18,97	3,34	7,31	9,70
2,00	13,33	12,18	5,60	10,40	12,47
4,00	10,11	7,99	5,49	13,72	18,01
8,00	6,80	5,19	4,35	20,38	29,10
16,00	4,04	3,31	3,07	34,30	51,27

Tabelle 2: plastische Torsionsgrenzmomente (plastic torsional moments) a+b

Diese Tabelle 2 zeigt also einen Fall bei dem die maximale Schubspannung vor allem im letzten Fall kein allzu gutes Kriterium für die Tragfähigkeit bildet. Die folgende Tabelle 3 für die Fälle c) und d) zeigt dies mit einer verstärkten Tendenz, jedoch ist hier festzustellen, daß der maximale Schubfluß hier gerade noch im Gleichgewicht steht. Bei völlig beliebigen Querschnitten, wenn also auch nur eines der Bleche verstärkt wird, ergäbe dieser Schubspannungsverlauf resultierende Querkraftkomponenten und würde damit das Gleichgewicht verletzen.

t0/ta	Ta	To	Ti	Mt-plas-I	Mt-plas-II
0,25	19,98	42,94	9,27	3,23	8,60
0,50	17,77	30,14	2,78	4,60	9,00
1,00	15,84	18,97	3,34	7,30	9,69
2,00	14,46	11,07	7,32	9,58	11,08
4,00	13,61	6,38	9,76	10,18	13,85
8,00	13,08	4,10	11,09	10,60	19,40

Tabelle 3: plastische Torsionsgrenzmomente (plastic torsional moments) c+d

Die Ermittlung des plastischen Torsionsmoments nach Methode I erscheint viel zu niedrig. Sofern man jedoch gut konstruiert und bemüht ist, seine Konstruktionen gleichmäßig auszunutzen, dürften die Unterschiede nicht so stark sein. Deshalb sollte auf die Methode II zumindest in einem allgemein verfügbaren Rechenprogramm verzichtet werden.

Für den Querschnitt des Falles a) wird nun noch eine Interaktionskurve mit einem Biegemoment um die starke Achse aufgezeigt:

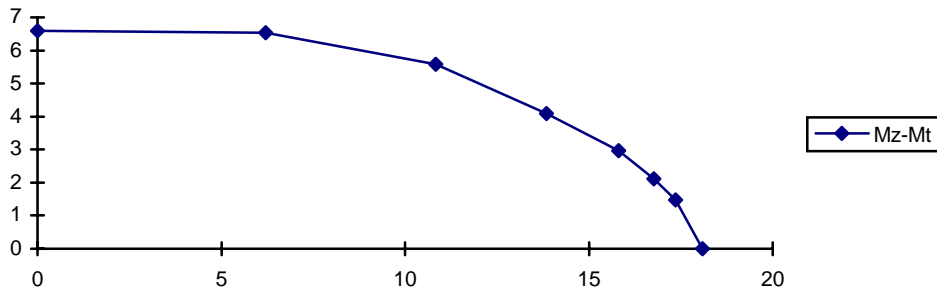


Bild 9: Mz-Mt Interaktion am geschlossenen Querschnitt
(Mz-Mt Interaction for a closed girder section)

9. Beispiel Rahmen-System

Wohin eine reale Aufgabenstellung letztendlich konvergiert, soll als nächstes untersucht werden. Dieser Querschnitt wird in einem Rahmen nach Theorie II. Ordnung verwendet [9]. Die ständigen Lasten werden als 1.35 fach, die Verkehrslasten mit einem Faktor von 1.5 angesetzt.

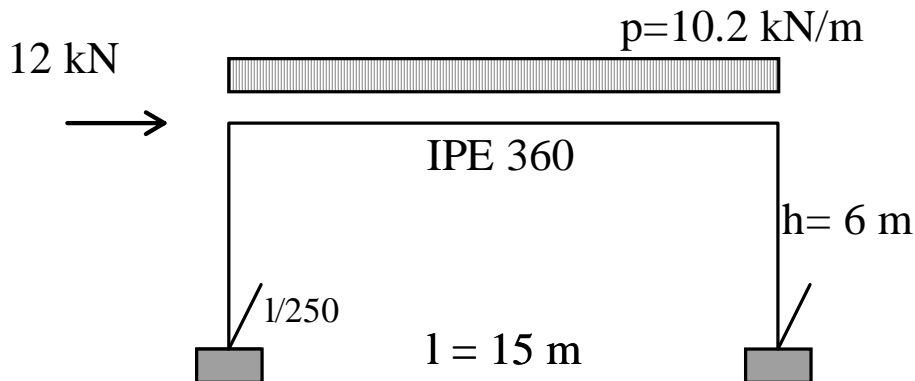


Bild 10: Rahmensystem (Frame system)

Die folgende Tabelle 4 zeigt die Werte, die sich bei den verschiedenen Fließansätzen ergeben. (Die Anzahl der Iterationen war in allen Fällen 9):

	Ohne Schub	Prandtl Lösung	Isotrope Reduktion	Vorrang Schub
Horizontale Verschiebung	17,883	18,094	18,078	18,226
Moment linke Ecke	210,8	210,6	210,6	210,5
Querkraft linke Ecke	109,4	109,5	109,5	109,5
Biegesteifigkeit links	81,30%	79,80%	79,70%	78,90%
Schubsteifigkeit links	100,00%	96,30%	96,70%	100,00%
Moment rechte Ecke	219,85	219,3	219,2	218,6
Querkraft rechte Ecke	110,6	110,6	110,6	110,6
Biegesteifigkeit rechts	33,10%	32,20%	32,00%	30,90%
Schubsteifigkeit rechts	100,00%	60,70%	65,40%	100,00%

Tabelle 4: Ergebnisse des Rahmens
Results of the frame example

Auf den ersten Blick ergeben sich bei den Verformungen und Momenten kaum Unterschiede. Auffällig ist aber, daß sich die Schubsteifigkeit des Riegels an der rechten Ecke zwischen 60 und 100 % einstellt ohne daß die Lösung insgesamt allzu deutlich davon beeinflusst wird.

10. Folgerungen

Es würde hier sicher zu weit führen, detaillierte Untersuchungen an allen weiteren Schnittgrößen-Kombinationen aufzuzeigen. Festzuhalten bleibt aber, daß über eine numerische Integration der reduzierten Spannungsverläufe aller Schnittgrößen in einem beliebigen Querschnitt sehr genaue Interaktionsbeziehungen einschließlich einer brauchbaren Steifigkeitsreduktion ermittelbar sind.

In Anbetracht der geringen Unterschiede bei diesen Beispielen bietet sich eine theoretisch fundierte Lösung nach Prandtl als Rechenverfahren an. Aber auch eine isotrope Reduzierung aller Spannungskomponenten ist vertretbar. Bei einer konsequenten Trennung der Spannungskomponenten nach erzeugender Beanspruchung reduziert dann der Schubfluß in den Flanschen zwar das aufnehmbare Moment, aber die Reduktion der Schubsteifigkeit beginnt erst, wenn der Steg ebenfalls in den plastischen Bereich kommt. Dies kann durch ein hohes Biegemoment genauso erreicht werden wie durch eine große Querkraft.

Wesentlicher Punkt des hier vorgeschlagenen Verfahrens ist eine konsequente Berücksichtigung der Schubsteifigkeiten und der Schubspannungen in der gesamten Rechnung. Viele Sonderfälle einer Handrechnung sind fast automatisch dadurch verschwunden.

Mit diesem Verfahren lassen sich deshalb allgemeine nichtlineare Berechnungen nach der Fließzonentheorie durchführen, die nicht nur genauere sondern auch wirtschaftlichere Ergebnisse erbringen. Die Methode

ist für die Praxis deshalb nicht nur geeignet, sondern auch leichter zu behandeln als Fließgelenktheorie mit vielen Sonderbedingungen.

11. Literatur

- [1] Ch. Petersen
Stahlbau, Vieweg Braunschweig, (1990)
- [2] K.W.Bieger
Fließgelenke oder nichtlineare Theorie bei Stahlbetontragwerken
Tagungsheft Baustatik-Baupraxis BB4, Hannover, 1990
- [3] H.Rothert,N.Gebbeken,B.Binder
Numerische Modellbildung für eine konsistente Traglasttheorie im
Stahlbau,Tagungsheft Baustatik-Baupraxis BB5, München, 1993
- [4] H. Rubin
Interaktionsbeziehungen zwischen Biegemoment, Querkraft und
Normalkraft für einfachsymmetrische I- und Kastenquerschnitte
Stahlbau 47 (1978) S. 76-85, S. 145-151, S. 174-181
- [5] Th.Fink, J.-St. Kreuz
Berechnungsverfahren nach der Fließzonentheorie II. Ordnung für
räumliche Rahmensysteme nach Theorie II.Ordnung. Bauingenieur 57
(1982) S. 297-302
- [6] H.Werner, J.Stieda, C.Katz, K.Axhausen
TOP-Statik, Bemessung und Stabilität räumlich beanspruchter
Stahlbetontragwerke
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-CAD 67, September 1978
- [7] Handbuch AQB/STAR2, SOFiSTiK GmbH München, 1995
- [8] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor,
The Finite Element Method, McGrawHill London, 1991
- [9] W.Vogel
Calibrating Frames, Vergleichsberechnungen an verschiebl. Rahmen,
Stahlbau (1985) S. 295-301